Geometria B
(con soluzioni degli es. 3,4)

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2017/2018
6 luglio 2018

Lo studente che intende avvalersi del voto ottenuto alla prova intermedia svolga solamente gli esercizi n. 3 e n. 4. Il tempo a sua disposizione è di due ore.

Lo studente che non si avvale della prova intermedia svolga tutti e quattro gli esercizi. Il tempo a sua disposizione è di tre ore.

Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}$ la retta reale, sia $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ e sia η la topologia su $\mathbb{R}$ avente come una base la seguente famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi:

$$\mathcal{B} := \{[a,b) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \,|\, a,b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

(1a) Si dimostri che lo spazio topologico $(\mathbb{R},\eta)$ soddisfa il primo assioma di numerabilità ma non il secondo.

(1b) Consideriamo su $\mathbb{R}$ la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita ponendo:

$$x\,\mathcal{R}\,y \text{ se e soltanto se } x = y \text{ oppure se } x \leq 0 \text{ e } y \leq 0.$$

Indichiamo con $(\mathbb{R}/_{\mathcal{R}},\eta')$ lo spazio topologico quoziente di $(\mathbb{R},\eta)$ modulo $\mathcal{R}$ e denotiamo con $\pi : (\mathbb{R},\eta) \to (\mathbb{R}/_{\mathcal{R}},\eta')$ l'applicazione di passaggio al quoziente. Si dica se π è una applicazione aperta.

(1c) Si dica se il sottoinsieme $[0,1]$ di $(\mathbb{R},\eta)$ è compatto.

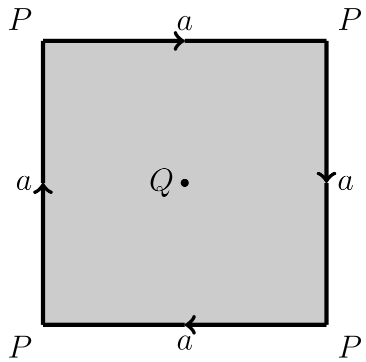
Esercizio 2. Uno spazio topologico è detto localmente connesso se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi.

(2a) Sia (X,τ) uno spazio topologico localmente connesso. Si dimostri che tutte le componenti connesse di (X,τ) sono aperte in (X,τ).

(2b) Sia (X,τ) uno spazio topologico con la seguente proprietà: per ogni $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, tutte le componenti connesse del sottospazio topologico (A,τ_A) di (X,τ) sono aperte in (X,τ). Si dimostri che (X,τ) è localmente connesso.

(2c) Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $(X \times X,\xi)$ il prodotto topologico di (X,τ) con se stesso. Si dimostri che (X,τ) è localmente connesso se e soltanto se lo è $(X \times X,\xi)$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio topologico X_4 ottenuto identificando i quattro lati di un quadrato come in figura. I vertici sono tutti identificati nel punto P. Sia Y_4 lo spazio topologico ottenuto da X_4 togliendo un punto Q interno al quadrato. Siano X_5 e Y_5 definiti in modo analogo a partire da un pentagono.



(3a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X_4, X_5, Y_4 e Y_5.

(3b) Si stabilisca se tra tali spazi ci sono coppie di spazi omotopicamente equivalenti.

(3c) Si dica se X_4 o X_5 sono omotopicamente equivalenti a una superficie compatta.

SOLUZIONE: (3a) Per il calcolo di $\pi(X_4, P)$ si può applicare il teorema di Seifert-Van Kampen, scegliendo come aperti Y_4 e un (piccolo) disco centrato in Q. Y_4 si retrae con deformazione sul bordo del quadrato coi lati identificati, quindi è omotopicamente equivalente a S^1, mentre il disco è contraibile. Sia x_0 un punto nell'intersezione del disco con Y_4. Per il teorema $\pi(X_4, x_0)$ è generato da una classe $[\alpha]$ (con $\alpha = \overline{\gamma} * a * \gamma$ cammino ottenuto componendo a con un segmento γ congiungente P con x_0), con unica relazione $[\alpha]^4 = 1$. Dunque $\pi(X_4, x_0) \simeq \pi(X_4, P) \simeq \mathbb{Z}_4$, il gruppo ciclico con quattro elementi.

Analogamente, $\pi(X_5, P) \simeq \mathbb{Z}_5$. Inoltre, per quanto detto sopra $\pi(Y_4, P) \simeq \pi(Y_5, P) \simeq \pi(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

(3b) Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi. Per il punto a), solo Y_4 e Y_5 sono omotopicamente equivalenti.

(3c) I gruppi fondamentali di X_4 e X_5 sono abeliani, ma non sono isomorfi agli abelianizzati dei gruppi fondamentali delle superfici compatte (solo quello di $U_2 = \mathbb{RP}^2$ è ciclico, ma di ordine 2), per cui i due spazi non sono omotopicamente equivalenti ad alcuna superficie compatta.

Esercizio 4. Sia $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ e sia γ la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorsa in senso antiorario. Si consideri l'integrale di linea

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z+a}{z-a} z^n \, dz.$$

(4a) Mostrare che I vale $2a^{n+1}$ per ogni intero $n \geq 0$.

(4b) Calcolare I per ogni intero $n < 0$.

SOLUZIONE: (4a) Essendo a interno a γ (e quindi $Ind_\gamma(a) = 1$), la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione olomorfa $f(z) = (z+a)z^n$ fornisce il risultato: $I = f(a) = 2aa^n = 2a^{n+1}$ per ogni $n \geq 0$.

(4b) Sia $m = -n > 0$. La funzione $g(z) = (z+a)/(z^m(z-a))$, meromorfa su $\mathbb{C}$, ha un polo di ordine m in $z=0$ se $a=0$, mentre ha un polo semplice in a e un polo di ordine m in 0 se $a \neq 0$, e nessuna altra singolarità.

Se $a = 0$, $I = \mathrm{Res}_0(1/z^m) = 1$ se $m = 1$ e $I = 0$ se $m > 1$.

Se $a \neq 0$, $I = \mathrm{Res}_a(g) + \mathrm{Res}_0(g)$. Si ha $\mathrm{Res}_a(g) = (a+a)/a^m = 2/a^{m-1} = 2a^{n+1}$ poiché il polo è semplice. Inoltre se $m = 1$ si ha $\mathrm{Res}_0(g) = (0+a)/(0-a) = -1$. Se invece $m > 1$, si ottiene

$$\mathrm{Res}_0(g) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \left(\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{(m-1)} \right) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{2a(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-a)^m} = -\frac{2}{a^{m+1}} = -2a^{n+1}.$$

Dunque per $n = -1$ si ha $I = 2 - 1 = 1$, mentre per $n \leq -2$ vale $I = 2a^{n+1} - 2a^{n+1} = 0$.

Un modo alternativo per calcolare I nel caso $m > 1$, che non richiede il calcolo delle derivate, consiste nel trovare il residuo all'infinito. Infatti si ha $I = -\mathrm{Res}_\infty(g) = 0$ (la funzione $(-1/w^2)g(1/w) = -w^{m-2}(1+aw)/(1-aw)$ è olomorfa nell'intorno di 0 se $m > 1$).